5/4/2016

Ορισμός: Μια περιοχή V ενός σημείου $p \in S$ καλείται κανονική αν $V = \exp_p(B_\varepsilon(0))$ με $\exp_p : B_\varepsilon(0) \to S$ διαφορομορφισμός

Κανονικές συντεταγμένες: Θεωρώ ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, e_2\}$ του T_pS $\forall w \in B_\varepsilon(0)$, $w = u^2 e_1 + v^2 e_2$
$u^2 + v^2 < \varepsilon$

Ορίζουμε σύστημα κανονικών συντεταγμένων

$X : \{(u,v) \mid u^2+v^2 < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$

$X(u,v) = \exp_p(ue_1 + ve_2)$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(p) = G(p) = 1 \\ F(p) = 0 \end{array}}$$

Γεωδαισιακές πολικές συντεταγμένες

$u = \rho\cos\theta \quad v = \rho\sin\theta$
$0 < \rho < \varepsilon \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi$

$X : U \subseteq \mathbb{R}^n \to S$

$U = \{(\rho,\theta) / 0 < \rho < \varepsilon \ , \ 0 < \theta < 2\pi\}$

$X(\rho,\theta) = \exp_p(\rho\cos\theta \bar{e}_1 + \rho\sin\theta \bar{e}_2)$ //

$X : B_\varepsilon(0) \setminus \ell \to \exp(B_\varepsilon(0)) - L$

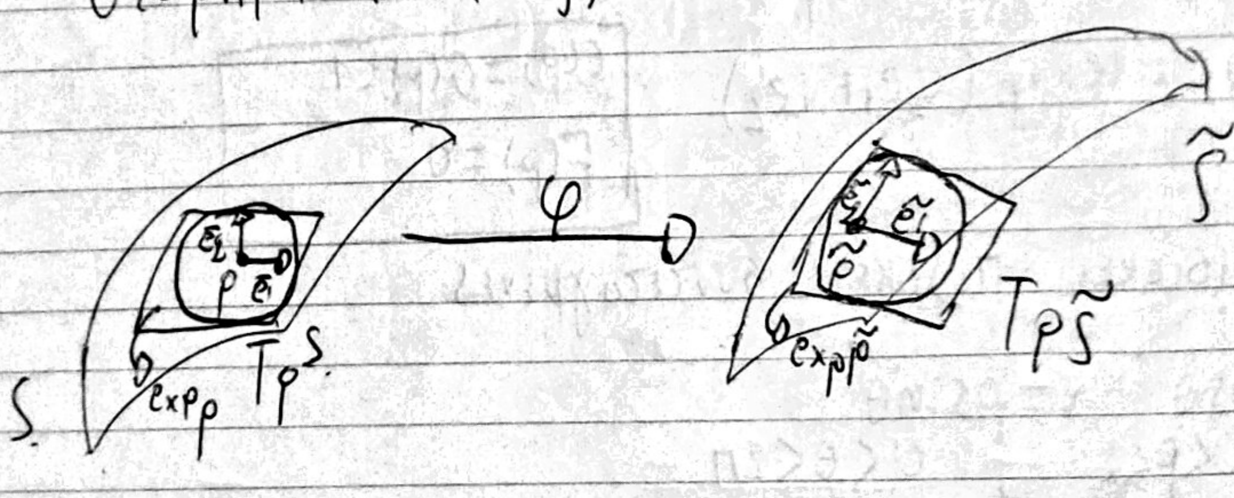
Πρόταση: $E=1 \quad F=0, \quad \lim_{\rho \to 0} \sqrt{G} = 0$

$\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$

Έξοχο Θεώρημα: $K = -\dfrac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$

$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0$

Θεωρημα (Minding):



Εστω $S, \tilde{S}$ δυο επιφάνειες με την ίδια <u>σταθερή</u> καμπυλότητα Gauss K. Θεωρούμε την γραμμική ισομετρία $\varphi: T_pS \to T_p\tilde{S}$ ώστε $\varphi(e_1) = \tilde{e}_1$, $\varphi(e_2) = \tilde{e}_2$. Τότε υπάρχει περιοχή V του p στην S, περιοχή $\tilde{V}$ του $\tilde{p}$ στην $\tilde{S}$ και ισομετρία $\varphi: V \to \tilde{V}$ τέτοια ώστε $\varphi(p) = \tilde{p}$ και $d\varphi_p = \phi$

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρώ $V, \tilde{V}$ κανονικές περιοχές των $p, \tilde{p}$ αντιστοίχως καθώς και τα αντίστοιχα συστήματα γεωδαισιακών πολικών συντεταγμένων $X: B_\varepsilon(0) - C \to V - L$, $\tilde{X}: \tilde{B}_\varepsilon(0) - \tilde{C} \to \tilde{V} - \tilde{L}$ με κοινές παραμέτρους ρ, θ. Τότε από προηγούμενη πρόταση έχουμε: $E = 1 = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$, $\lim_{\rho \to 0} \sqrt{G} = 0 = \lim_{\rho \to 0} \sqrt{\tilde{G}}$, $\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1 = \lim_{\rho \to 0} (\sqrt{\tilde{G}})_\rho$

Τότε όμως από έξοχο θεώρημα:

$$\begin{cases} (\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0 \\ (\sqrt{\tilde{G}})_{\rho\rho} + K\sqrt{\tilde{G}} = 0 \end{cases}$$

(1) Έστω $k=0$ Τότε $(\sqrt{G})_{\rho\rho}=0$

$\Longrightarrow (\sqrt{G})_\rho = g(\theta)$

Τότε $\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1 \Longleftrightarrow \lim_{\rho \to 0} g(\theta) = 1$

$\Longleftrightarrow g(\theta)=1$. Τότε $(\sqrt{G})_\rho = g(\theta) = 1$

Όμως $\sqrt{G}(\rho,\theta) = \rho + h(\theta)$

Αλλά $\lim_{\rho \to 0} \sqrt{G} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\rho \to 0} \rho + h(\theta) = 0$

$\Longleftrightarrow \lim_{\rho \to 0} h(\theta) = 0 \Longleftrightarrow h(\theta)=0$

Τότε $\sqrt{G}(\rho,\theta) = \rho \Longrightarrow G(\rho,\theta) = \rho^2$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}$$

Άρα υπάρχει ισομετρία $\phi : V-L \to \tilde{V}-\tilde{L}$,

Έστω $q \in V-L \Longrightarrow q = \exp_p(w)$, $w \in T_pS$

$\rightsquigarrow \varphi(w) \in T_{\tilde{p}}\tilde{S} \rightsquigarrow \exp(\varphi(w)) \in \tilde{V}-\tilde{L}$

$\phi = \exp_{\tilde{p}} \circ \varphi \circ (\exp_p)^{-1}$

Λόγω συνέχειας η $\phi: V \to \tilde{V}$ είναι ισομετρία

$$\phi(p) = \exp_{\tilde{p}}\left(\varphi\left(\exp_p\right)^{-1}(p)\right) = \exp_{\tilde{p}}(\varphi(0))$$

$$= \exp_{\tilde{p}}(0) = \tilde{p}$$

$$d\phi_p = d(\exp_{\tilde{p}}) \circ d\varphi \circ d(\exp_p)^{-1} = I \circ \varphi \circ I^{-1} = \varphi$$

Έστω $K > 0 \Rightarrow \sqrt{G}(\rho,\theta) = A(\theta)\cos(\sqrt{+K}\rho) + B(\theta)\sin(\sqrt{+K}\rho)$

$\lim_{\rho \to 0} \sqrt{G}(\rho,\theta) = 0 \Rightarrow \quad A(\theta)\cdot 1 = 0 \Rightarrow A(\theta) = 0$

Τότε $\sqrt{G}(\rho,\theta) = B(\theta)\cdot \sin\sqrt{+K}\rho$

$(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta) = B(\theta)\sqrt{+K}\cos(\sqrt{+K}\rho)$

$\lim_{\rho \to 0}(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta) = 1 \Rightarrow B(\theta)\sqrt{+K} = 1 \Rightarrow B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{K}}$

$$\Rightarrow \sqrt{G}(\rho,\theta) = \frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}\rho) \Rightarrow G(\rho,\theta) = \frac{1}{K}\sin(\sqrt{K}\rho)$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}$$

Έστω $Isom(S)$ = το σύνολο των ισομετριών μιας κανονικής επιφάνειας S

<u>Ορισμός:</u> Το A καλείται γεωμετρικώς ισότιμο του B στην S $(A, B \subset S)$ αν-ν $\exists f \in Isom(S)$

• $B \in f(A)$

i) A γεωμετρικώς ισότιμο A διότι $I_d \in Isom(S)$

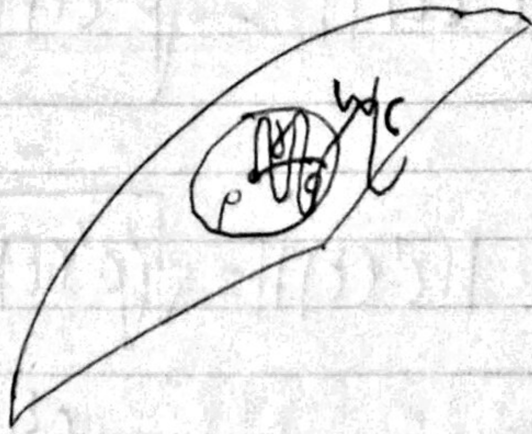
ii) A γεωμετρικώς ισότιμο $B \Rightarrow B$ γεωμετρικώς ισότιμο με A (αφού αν $f \in Isom(S)$ $\Rightarrow f^{-1} \in Isom(S)$)

iii) $\left.\begin{array}{l} A \text{ γεωμετρικώς ισότιμο με } B \\ B \text{ γεωμετρικώς ισότιμο με } \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A$ γεωμετρικώς ισότιμο με Γ.

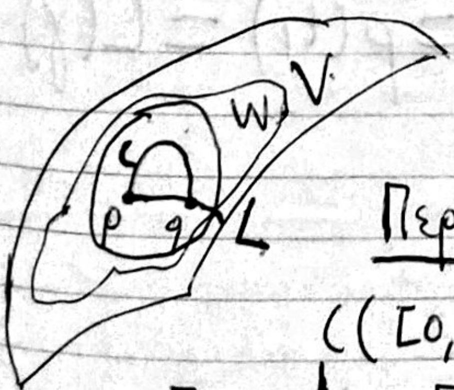
Ερώτημα: (i) Ελαχιστοποιούν οι γεωδαισιακές το μήκος

(ii) Καμπύλες που ελαχιστοποιούν το μήκος είναι γεωδαισιακές

$\boxed{\text{Θεώρημα:}}$ Για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει περιοχή W τέτοια ώστε αν $\gamma : [0, t_1] \to W$ είναι γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$ και $\gamma(t_1) = q$ τότε $L(c) \geq L(\gamma)$ για κάθε καμπύλη $c : [0, t_1] \to S$ με $c(0) = p$, $c(t_1) = q$. Επιπλέον $L(c) = L(\gamma)$ αν-ν η c αναπαραμέτρηση της γ



<u>Απόδειξη:</u> Έστω V κανονική περιοχή του p και θεωρώ ανοικτό W με $p \in W$ ώστε $\overline{W} \subset V$



Θεωρώ γεωδαισιακό σύστημα συντεταγμένων με $\exp_p(l) = L = \gamma$

<u>Περίπτωση I:</u> Υποθέτω ότι $c([0, t_1]) \subseteq W$ και η c δεν τέμνει την L παρά μόνο στα p, q δηλαδή $c(0, t_1) \subseteq V - L \Rightarrow$ η c γράφεται ως $c(t) = X(\rho(t), \theta(t))$, $t \in (0, t_1)$

$$L(c) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{t_1 - \varepsilon} \|c'(t)\| \, dt$$

$$c'(t) = \rho' X_\rho(\ldots) + \theta' X_\theta(\ldots)$$

$$\|c'(t)\|^2 = E(\rho'(t))^2 + \cancel{2F\rho'(t)\theta'(t)} + G(\theta'(t))^2$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \|c'(t)\|^2 = (\rho'(t))^2 + G(\theta'(t))^2$$

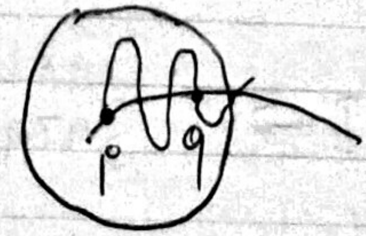
Άρα $\|c'(t)\| = \sqrt{(\rho'(t))^2 + G(\theta'(t))^2}$

Τότε $L(c) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{t_1-\varepsilon} \sqrt{(\rho'(t))^2 + G(\rho(t),\theta(t))\cdot(\theta'(t))^2}$

$$\geq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{t_1-\varepsilon} |\rho'(t)|\, dt \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{t_1-\varepsilon} \rho'(t)\, dt$$

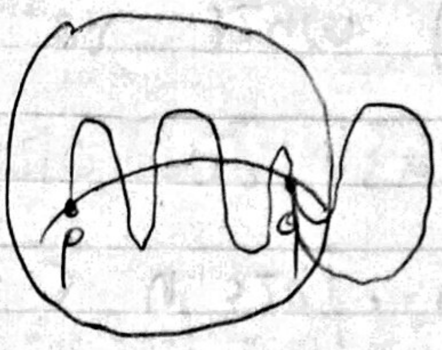
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (\rho(t_1-\varepsilon) - \rho(\varepsilon)) = \rho(t_1) = L(\gamma).$$

Περίπτωση II:



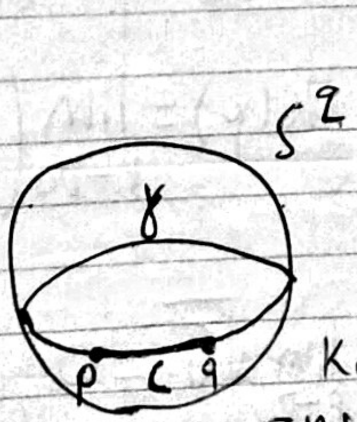
$t \in (\varepsilon, t_1)$

Περίπτωση III:



Συμπέρασμα: Οι γεωδαισιακές λύνουν το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μήκους μόνο σε τοπικό επίπεδο.

Παράδειγμα:

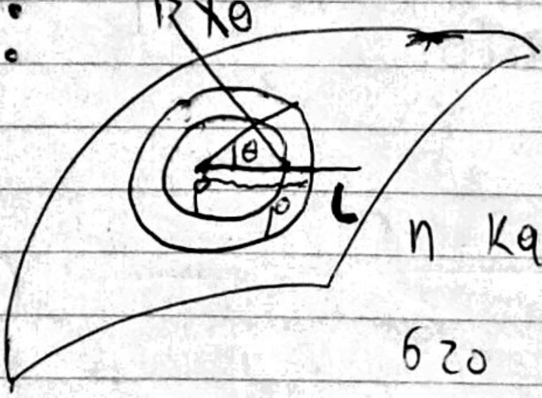


$L(\gamma) > L(c)$

Άρα αφού η γ (μέγιστος κύκλος, δηλαδή γεωδαισιακή της S^2) έχει μεγαλύτερα μήκος από την c και c δεν είναι γεωδαισιακή. Αυτό ήταν παράδειγμα σχετικά με το προηγούμενο συμπέρασμα

Θεώρημα: Έστω $c: I \to S$ κατά τμήματα κανονική καμπύλη (με παράμετρο το μήκος τόξου) ώστε να ελαχιστοποιεί το μήκος μεταξύ δυο οποιονδήποτε σημείων της. Τότε η c είναι γεωδαισιακή

Άσκηση 1:



$L(r)$ = μήκος γεωδαισιακής καμπύλης ακτίνας r. Δείξτε οτι η καμπυλότητα Gauss στο p είναι

$$K(p) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} \right)$$

Λύση: $E = 1$, $F = 0$, $\lim_{\rho \to 0} \sqrt{G} = 0$, $\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$

Άρα $L(r)$ = μήκος παραμετρικής καμπύλης $\rho = r$.

$$L(r)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\|x_\theta(r,\theta)\|\,d\theta=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\sqrt{G}(r,\theta)\,d\theta$$

Όμως $(\sqrt{G})_{\rho\rho}+K\sqrt{G}=0 \Rightarrow (\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}+K_\rho\sqrt{G}+K(\sqrt{G})_\rho=0$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}(\rho,\theta)+K(p)=0$$

Θεωρώ το ανάπτυγμα της $\sqrt{G}(\rho,\theta)$

(για $\theta=$ σταθ) γύρω από το $\rho=0$

$$\sqrt{G}(\rho,\theta)=\sqrt{G}(\cancel{0},\theta)^{0}+\rho\cdot(\sqrt{G})_\rho(0,\theta)^{1}+\frac{\rho^2}{2}\cancel{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}(0,\theta)^{0}$$

$$+\frac{\rho^3}{3!}(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}(0,\theta)+R(\rho,\theta)\ ,\quad \lim_{\rho\to 0}\frac{R(\rho,\theta)}{\rho^3}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{G}(\rho,\theta)=\rho+\frac{\rho^3}{3!}(-K(p))+R(\rho,\theta),$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{R(\rho,\theta)}{\rho^3}=0$$

$$L(r)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\sqrt{G}(r,\theta)\,d\theta=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\left(r-K(p)\cdot\frac{r^3}{3!}+R(r,\theta)\right)d\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\left\{\left(r-K(p)\cdot\frac{r^3}{3!}\right)(2\pi-2\varepsilon)+\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}R(r,\theta)\,d\theta\right\}$$

$$= 2\pi r - \frac{2\pi}{3!} K(p) r^3 + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} R(r,\theta)\, d\theta$$

$$\Rightarrow L(r) = 2\pi r - \frac{2\pi}{6} K(p) r^3 + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} R(r,\theta)\, d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{6} K(p) r^3 = 2\pi r - L(r) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} R(r,\theta)\, d\theta$$

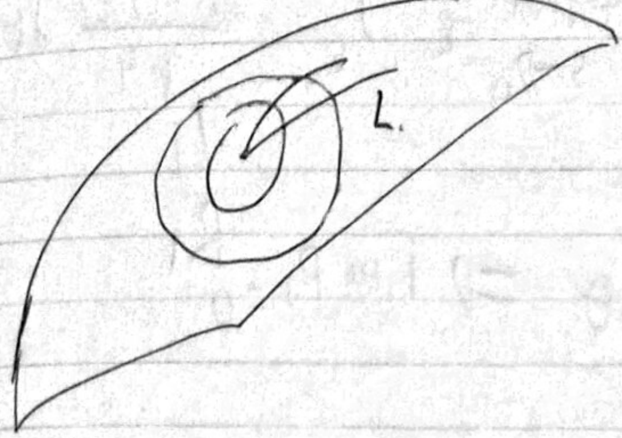
$$\Rightarrow K(p) = \frac{6}{2\pi r^3} \left(2\pi r - L(r) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{R(r,\theta)}{r^3}\, d\theta \right)$$

$$= \frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} + R_1, \quad \lim_{r \to 0} R_1(r) = 0$$

Άρα $K(p) = \lim_{r \to 0} \frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi r - L(r)}{r^3}$

Άσκηση: $A(r)$ = εμβαδόν γεωδαισιακού δίσκου ακτίνας r. Δείξτε ότι $K(p) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{12}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4} \right)$

Λύση:



$E = 1$, $F = 0$

$\lim_{\rho \to 0} \sqrt{G} = 0$, $\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$

$$A(r) \stackrel{\lim_{\varepsilon \to 0}}{=} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \sqrt{EG-F^2}\, \partial\theta\, \partial\rho$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \sqrt{G}\, \partial\rho\, \partial\theta\, \partial\rho$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \left(\rho - K(p) \cdot \frac{\rho^3}{3!} + R(\rho,\theta)\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} (\rho - K(p) \cdot \frac{\rho^3}{3!}\, (2\pi - 2\varepsilon) + \left(\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} R(\rho,\theta)\, \partial\theta\right) \partial\rho$$

$$= 2\pi \int_0^r (\rho - K(p) \frac{\rho^3}{3!}\, \partial\rho + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} R(\rho,\theta)\, \partial\theta\, \partial\rho$$

$$\Rightarrow A(r) = 2\pi \left\{ \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^r - \frac{K(p)}{6} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^r + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} R(\rho,\theta)\, \partial\theta\, \partial\rho \right.$$

$$\Rightarrow A(r) = \pi r^2 - \frac{\pi}{12} K(p) r^4 + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} R(\rho,\theta)\, \partial\theta\, \partial\rho$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12} K(p) r^4 = \pi r^2 - A(r) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi-1} R(\rho,\theta)\, \partial\theta\, \partial\rho$$

$$\Rightarrow K(p) = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4} + \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\int_{\varepsilon}^{r-\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{R(\rho,\theta)}{r^4}\, d\theta\, d\rho}_{\parallel \atop R_1}$$

$$R_1 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \frac{R(\rho,\theta)}{r^4}\, d\rho \right) d\theta \Rightarrow \lim R_1 = 0$$

Με βάση την άσκηση και την ισοπεριμετρική ανισότητα $\underline{L^2 \geq 4\pi A}$ μπορούμε να βρούμε την ποσότητα: $\boxed{4\pi A(r) - L^2(r) = \pi^2 r^4 K(p) + \tilde{R}}$

Άσκηση: Έστω S κανονική επιφάνεια και $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητα K.

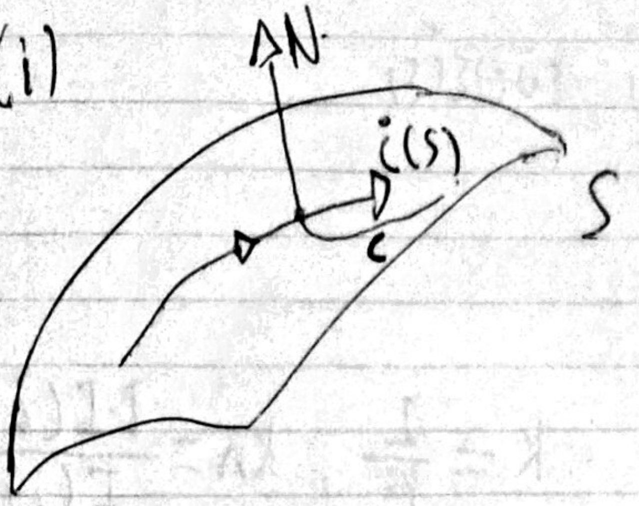
(i) Δείξτε ότι $K^2 = K_n^2 + (K_g)^2$.

όπου $K_n = K_n(\dot{c}(s))$ = κάθετη καμπυλότητα
K_g = γεωδαισιακή καμπυλότητα

(ii) Δείξτε ότι οι μόνες καμπύλες που είναι συγχρόνως ασυμπτωτικές και γεωδαισιακές είναι ευθείες.

(iii) Υπολογίστε τη γεωδαισιακή καμπυλότητα μικρών κύκλων στην $S^2(R)$

Λύση: (i)



$K = \|\ddot{c}\|$

$k_n(w) = \dfrac{II(w)}{I(w)} = \dfrac{\langle Lw, w\rangle}{\|w\|^2}$

$$\ddot{c} = (\ddot{c})^T + \langle \ddot{c}, N\circ c\rangle N\circ c$$

$$\Rightarrow \ddot{c} = \frac{D\dot{c}}{ds} + \langle \ddot{c}, N\circ c\rangle N\circ c$$

$$\|\ddot{c}\|^2 = \left\|\frac{D\dot{c}}{ds}\right\|^2 + \langle \ddot{c}, N\circ c\rangle^2$$

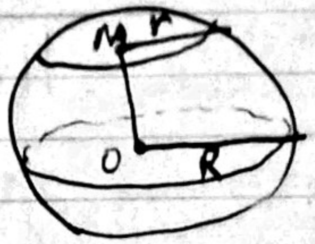
$$k^2 = (k_g)^2 + \langle \ddot{c}, N\circ c\rangle^2$$

$$\langle \ddot{c}, N\circ c\rangle = \langle \dot{c}, N\circ c\rangle^{\cdot} - \langle \dot{c}, (N\circ c)^{\cdot}\rangle = -\langle \dot{c}, dN(\dot{c})\rangle$$

$$= \langle \dot{c}, L\dot{c}\rangle = II(\dot{c}) = \frac{II(\dot{c})}{I(\dot{c})} = k_n(\dot{c})$$

(ii) εφόσον θα είναι ασυμπτωτικές άρα $k_n(i) = 0$ και εφόσον γεωδαισιακές άρα $k_g = 0$. Τότε από (i) $\Rightarrow k = k_n^2 + k_g^2 = 0$ $\Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ καμπύλες ευθείες

(iii)



$$k = \frac{1}{r}, \quad k_n = \frac{II(i)}{I(i)}$$

Όμως για την σφαίρα

$$II = \frac{1}{R} I \Rightarrow k_n = \frac{1}{R}$$

Άρα $k^2 = k_g^2 + k_n^2 \Rightarrow k_g^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}$

$$\Rightarrow k_g = \pm \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}$$

Σημείωση (i) Πιθανόν τέλη Μαΐου να γίνει μια **απαλλακτική πρόοδος**

(ii) Το επόμενο μάθημα είναι μετά το Πάσχα